MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR.

Ecole Normale Supérieure.

Concours d'entrée en première année.

Spécialité mathématiques-physique. Année 2007.

Première épreuve de mathématiques.

Durée : 4 heures

Exercice 1

Soit E un espace euclidien de dimension finie sur $\mathbf{R}$; on notera $\langle v \mid w \rangle$ le produit scalaire des vecteurs v et w et $\|v\|$ la norme euclidienne de v.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est une application différentiable sur l'ouvert Ω de E et si a est un point de Ω, on notera $f'(a)$ sa différentielle au point a.

1) Montrer que si $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est une application différentiable et si a est un point de l'ouvert Ω, il existe un unique vecteur, noté $\nabla f(a)$ et appelé gradient de f au point a, tel que pour tout v dans E, on ait

$$f'(a)v = \langle \nabla f(a) \mid v \rangle$$

2) Déterminer le gradient $\nabla f(a)$ pour chacune des fonctions suivantes

$$\text{(a)} \quad f(x) = \|x\|^2 \quad , \quad \text{(b)} \quad f(x) = \|x\| \ , \ x \neq 0 \quad , \quad \text{(c)} \quad f(x) = \|x\|^{-1} \ , \ x \neq 0$$

3) Soit a, b et c trois points de E et $g : E \longrightarrow \mathbf{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \|x - a\| + \|x - b\| + \|x - c\|$$

a) Montrer que si x n'est pas un des points a, b et c alors

$$\nabla g(x) = x_a + x_b + x_c$$

où on a posé $x_p = \|x - p\|^{-1}(x - p)$ pour tout point p différent de x.

b) Montrer qu'il existe $z \in E$ tel que $g(z) \leq g(x)$ pour tout x dans E.

c) Montrer que si z n'est pas un des points a, b et c, on a

$$z_a + z_b + z_c = 0$$

et en déduire, dans ce cas, que

$$\langle z_a \mid z_b \rangle = \langle z_b \mid z_c \rangle = \langle z_c \mid z_a \rangle = -1/2$$

d) Justifer alors l'assertion suivante :

Le point z qui minimise la somme $\|x - a\| + \|x - b\| + \|x - c\|$ est soit un des points a, b et c, soit le point à partir duquel on voit les trois côtés $[ab]$, $[bc]$ et $[ca]$ sous un angle de $2\pi/3$.

Exercice 2.

La fonction Gamma est définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

1) Prouver que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \geq 0$.

2) On pose pour tout réel a

$$F(a) = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 + \int_0^1 \frac{\exp(-a^2(1+x^2))}{1+x^2} dx$$

a) Montrer que F est constante sur $\mathbf{R}$.

b) Calculer $F(0)$ et en déduire que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

c) Que vaut $\Gamma(1/2)$?

3) Soit α et β deux réels strictement positifs, calculer à l'aide de la fonction Γ, l'intégrale

$$\beta x^{\alpha/\beta} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-xt^\beta) dt$$

4) Soit α et β deux réels strictement positifs et $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue en 0 et n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité.

On suppose de plus qu'il existe un réel x_0 tel que si $x \geq x_0$ alors la fonction

$$t \longrightarrow t^{\alpha-1} |f(t)| \exp(-xt^\beta)$$

est intégrable sur $[0, \infty[$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left| \beta x^{\alpha/\beta} \int_0^\eta t^{\alpha-1} (\ f(t) - f(0)\ ) \exp(-xt^\beta) dt \right| < \varepsilon \Gamma(\alpha/\beta)$$

b) Montrer que si $t > \eta > 0$ et $x > x_0$ alors

$$\exp(-xt^\beta) \leq \exp(-(x - x_0)\eta^\beta) \exp(-x_0 t^\beta)$$

c) En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \beta x^{\alpha/\beta} \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(t) \exp(-xt^\beta) dt = \Gamma(\alpha/\beta) f(0)$$

Application

5) Trouver un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, pour chacune des intégrales suivantes

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{t \exp(-xt)}{(2+t^2)^3} dt, \quad \text{b)} \int_0^1 \exp(-xt) \frac{\sin^3 t}{t} dt, \quad \text{c)} \int_0^\infty \exp(-xt^2) \cos(t) dt$$

6) Trouver un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, pour chacune des intégrales suivantes

a) $\int_0^\infty \exp(-\mathrm{sh}t)\ dt$ (poser $\mathrm{sh}t = u$).

b) $\int_0^\infty \exp(-x.\mathrm{ch}t)\ dt$ (poser $\mathrm{ch}t = 1 + u^2$)

7) Montrer que pour tout entier n, on a l'équivalence

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos\theta). \cos(n\theta) d\theta \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et A une partie convexe de E.

On notera $\overline{A}$ l'adhérence de A dans E et A° l'intérieur de A dans E.

Pour les questions (2), (3) et (4) ci-dessous, on s'aidera de dessins pour expliquer et convaincre.

1) Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

2) Montrer que A° est un convexe.

3) Montrer que si $a \in A^\circ$ et $b \in A$ alors $[ab[= \{tb + (1-t)a \ ; \ 0 \leq t < 1\}$ est inclus dans A°.

4) Montrer que si $a \in A^\circ$ et $b \in \overline{A}$ alors $[ab[= \{tb + (1-t)a \ ; \ 0 \leq t < 1\}$ est inclus dans A°.

5) Montrer que si A° est non vide alors son adhérence $\overline{A^\circ}$ dans E coïncide avec $\overline{A}$.

6) L'égalité $\overline{A^\circ} = \overline{A}$ est-elle encore valable pour des sous-ensembles A non convexes et d'intérieurs non vides ?

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR.

Ecole Normale Supérieure.

Concours d'entrée en première année.

Spécialité mathématiques-physique. Année 2007.

Deuxième épreuve de mathématiques.

Durée : 4 heures

Exercice 1.

1) Soit $A \in M(2, \mathbf{R})$ une matrice carrée réelle d'ordre 2 et de trace nulle.

a) Montrer que $A^2 = -(\det A).I$ où I représente la matrice unité de $M(2, \mathbf{R})$.

En déduire les implications suivantes

b) Si $\det A = 0$ alors $\exp(A) = I + A$.

c) Si $\det A = a^2 > 0$ alors $\exp(A) = \cos a.I + \dfrac{\sin a}{a} A$.

d) Si $\det A = -a^2 < 0$ alors $\exp(A) = \mathrm{ch}a.I + \dfrac{\mathrm{sh}a}{a} A$.

e) Minorer alors la trace de $\exp(A)$.

2) Ecrire l'exponentielle de chacune des matrices suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 75 & 0 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ , \ a, b \in \mathbf{R}$$

3) Existe-t-il une matrice $B \in M(2, \mathbf{R})$ telle que

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

On note $M(n, \mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles, carrées et d'ordre n et on considère la forme bilinéaire $b : M(n, \mathbf{R}) \times M(n, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$b(A, B) = \ \mathrm{trace}(AB)$$

1) Cette forme est-elle symétrique ?

2) Montrer que si la matrice A est non nulle et si elle est symétrique alors $b(A, A)$ est strictement positif.

3) Que dire de $b(A, A)$ lorsque A est antisymétrique ?

4) Prouver que b est une forme bilinéaire non-dégénérée et donner sa signature.

5) Soit h un endomorphisme de $M(n, \mathbf{R})$, montrer qu'il existe un unique endomorphisme h^* de $M(n, \mathbf{R})$ vérifiant

$$b(\ h(A),\ B\ ) = b(\ A,\ h^*(B)\ )$$

Cet endomorphisme h^* sera appelé **adjoint** de l'endomorphisme h.

6) Soit $A \in M(n, \mathbf{R})$, on considère les trois endomorphismes L_A, R_A et ad_A de $M(n, \mathbf{R})$ définis par

$$L_A X = AX \ \ , \ \ R_A X = XA \ \ , \ \ ad_A X = AX - XA$$

Donner leurs adjoints.

7) Soit A et C deux éléments de $M(n, \mathbf{R})$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(a) Il existe une matrice $X \in M(n, \mathbf{R})$ telle que $AX - XA = C$.

(b) Toute matrice B qui commute avec C vérifie $\text{trace}(CB) = 0$.

Exercice 3.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application vérifiant

$$x \in [0,1] \Longrightarrow 5x - 4f(x) \in [0,1] \text{ et } f(\ 5x - 4f(x)\ ) = x$$

On note $\Gamma = \{(x, f(x))\ ;\ x \in [0,1]\}$ le graphe de f et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Montrer que Γ est stable par A (i.e. $A(\Gamma) \subset \Gamma$)

3) En déduire que $f(x) = x$ pour tout x dans l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel non nul et $\mathbf{Z}_n$ ($= \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) l'anneau des entiers modulo n.

1) Ecrire la table d'addition et la table de multiplication de l'anneau $\mathbf{Z}_6$.

2) Montrer que $\mathbf{Z}_n$ est un corps si et seulement si l'entier n est premier.

3) Le polynôme $X^3 - 5X + 6$ est-il irréducible dans la corps $\mathbf{Z}_7$?

4) Ecrire toutes les matrices carrées d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$ et qui sont inversibles.

5) Soit p un nombre premier. On note $Gl(m, \mathbf{Z}_p)$ le groupe des matrices carrées d'ordre m, à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ et qui sont inversibles et on désigne par $g(m,p)$ le nombre d'éléments de ce groupe.

a) Montrer que

$$g(2,p) = (p^2 - 1)(p^2 - p)$$

b) Que vaut $g(3,p)$?

c) Que vaut $g(m,p)$?

Exercice 5

Soit b et b' deux formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbf{R}$. On note E^* l'espace dual de E et φ et φ' les applications linéaires de E dans E' définies par

$$\varphi(v)(w) = b(v,w) \ \ , \ \ \varphi'(v)(w) = b'(v,w) \ \ , \ v, w \in E$$

On suppose que la forme bilinéaire est non dégénérée si bien que l'application $\varphi : E \longrightarrow E^*$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1) On suppose qu'il existe une base $(e_1, \ \ldots, \ e_n)$ de E qui est orthogonale à la fois pour b et b'. Montrer que cette base est aussi une base de vecteurs propres de l'endomorphisme $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ de E.

2) On suppose que l'endomorphisme $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ de E possède n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de E qui est orthogonale à la fois pour b et b'.

3) On considère les deux formes quadratiques q et q' sur $\mathbf{R}^2$ définie par $q(x,y) = x^2 - y^2$ et $q'(x,y) = 2xy$. Existe-t-il une base de $\mathbf{R}^2$ qui est orthogonale à la fois pour q et q' ?.

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de la Technologie

ECOLE NORMALE SUPERIEURE — Session 2007

Concours d'Accès MP et PC

Epreuve de *Physique*

Durée **4H.**

Le sujet comporte **4 pages.**

Exercice : Vitesse de libération et trous noirs

1. A quelle altitude maximale h s'élève un objet assimilable à un point matériel de masse m en partant de la Terre de masse M_T avec une vitesse verticale $\vec{V}$ et soumis au seul champ de pesanteur terrestre ? On admettra qu'un repère lié à la Terre est galiléen.
2. Déduire alors la vitesse minimale V_l à communiquer à cet objet pour le libérer de l'attraction terrestre. Cette vitesse est appelée vitesse de libération et correspond à une altitude infinie. Calculer numériquement cette vitesse.
3. Exprimer V_l pour tout objet céleste sphérique de masse M et de rayon R. En utilisant les données relatives au système solaire, calculer la vitesse de libération de la Lune, de Mars et du Soleil.
4. L'objet se trouve maintenant à la surface d'une étoile contractée en une sphère de rayon 12 Km et de masse égale à quatre fois la masse du Soleil. Calculer la vitesse de libération et commenter le résultat obtenu.

On donne :

Terre	Masse : $M_T = 5{,}98\times10^{24}\,kg$	Rayon : $R_T = 6{,}4\times10^{6}\,m$
Lune	Masse : $M_L = 7{,}35\times10^{22}\,kg$	Rayon : $R_L = 1{,}74\times10^{6}\,m$
Mars	Masse : $M_M = 6{,}4\times10^{23}\,kg$	Rayon : $R_M = 3{,}4\times10^{6}\,m$
Soleil	Masse : $M_S = 1{,}99\times10^{30}\,kg$	Rayon : $R_S = 6{,}96\times10^{8}\,m$

Problème 1 : Mouvement de la Terre autour du Soleil

On considère dans le référentiel galiléen *R(Oxyz)* lié à la Terre, un objet ponctuel M de masse m soumis à la force d'attraction universelle $\vec{F}$ exercée par une masse m' située en O et donnée par :

$$\vec{F} = -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{e_r}$$

où r est la distance OM et $\vec{e_r}$ un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$.

A l'instant $t = 0$, l'objet M est lancé à partir de la position $M_0(r_0,0,0)$ avec la vitesse $\vec{V}_0(0,V_0,0)$, r_0 et V_0 étant positifs.

1. Montrer en appliquant le théorème du moment cinétique que la trajectoire de M est située dans le plan xOy et qu'elle est parcourue suivant la loi des aires. On posera $C = r^2\frac{d\theta}{dt}$, C est la constante des aires.

2. On définit la position de M par ses coordonnées polaires r et θ. En utilisant les formules de Binet : $V^2 = C^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$ et $\vec{\gamma} = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\vec{e}_r$ où $u = \frac{1}{r}$, montrer que l'équation de la trajectoire du point M est de la forme : $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$. Exprimer p et e en fonction de G, m', r_0 et V_0.
3. Donner la nature de la trajectoire suivant la valeur de e.
4. Calculer l'énergie totale E de M en fonction de G, m', m, C et e.
5. On s'intéresse aux trajectoires elliptiques où le demi-grand axe a est donné par $a = \frac{p}{1-e^2}$.
   a. Montrer que l'énergie mécanique ne dépend que de a.
   b. Calculer la vitesse du point M en fonction de a, θ et e. Déterminer cette vitesse quand le point M est le plus proche de O et quand il est le plus éloigné de O.
   En déduire la vitesse minimale et la vitesse maximale de la Terre au cours de sa trajectoire autour du Soleil sachant que a est égale à 150 millions de km et que l'excentricité de l'orbite terrestre est $e = 0.0167$.
   En déduire la vitesse orbitale moyenne de la Terre autour du Soleil.

Problème 2 : Onde électromagnétique dans un conducteur

Dans un repère orthonormé direct, $R\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$, on considère un milieu conducteur, globalement neutre occupant le demi espace $z > 0$ (figure 1). La conductivité de ce milieu en courant continu est $\gamma_0 = 0.6\times10^8\Omega^{-1}m^{-1}$. Les constantes électriques ε_0 et μ_0, de ce conducteur, sont identiques à celles du vide.

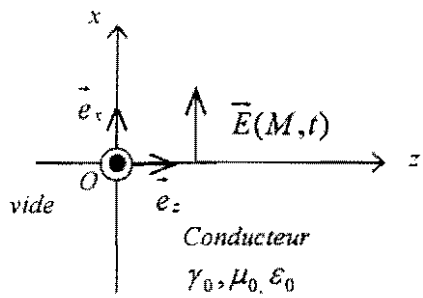


Figure 1

Le champ électrique d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation $\omega \le 10^{15} rd\,s^{-1}$ se propageant dans ce milieu est donné par : $\vec{E} = E_0\vec{e}_x\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)$ où E_0 est une constante réelle positive, $\delta = \delta(\omega)$ est une fonction positive de ω. On donne $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12} SI$ et $c = 3\times10^8 m\,s^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide).

1. Donner la direction de propagation, l'état de polarisation et l'expression de la vitesse de phase $V_\varphi(\omega)$ de cette onde.
2. Les expressions de $\vec{E}$ et $V_\varphi(\omega)$ mettent en évidence deux phénomènes physiques, les indiquer.
3. Ecrire, en notation complexe, l'expression $\underline{\vec{E}}$ du champ électrique $\vec{E}$. On introduira le nombre complexe $\underline{k(\omega)} = \frac{1-i}{\delta(\omega)}$.

4. Montrer que la densité du courant de déplacement est négligeable devant celle de conduction. Trouver dans ce cas l'équation de propagation du champ électrique. En déduire que δ est donnée par : $\delta(\omega)=\left(\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}\right)^{1/2}$.
5. Calculer numériquement ω et δ pour $\lambda=10^{-2}m$. Peut-on utiliser des récipients métalliques dans un four à micro-onde ? Justifier clairement votre réponse.
6. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde. En déduire le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.
7. On s'intéresse à l'énergie moyenne transférée au conducteur.
   a. Déterminer la puissance moyenne $< P_J >$ par unité de surface ($S=\Delta x\cdot\Delta y=1$) dissipée par effet Joule dans ce matériau.
   b. Donner en $z=0$, la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde. En déduire, en $z=0$, la puissance moyenne $< P >$ transférée au conducteur à travers l'unité de surface $S=\Delta x\cdot\Delta y=1$. Que devient cette puissance ?
8. On se place dans le cas où $\gamma_0\to\infty$ (modèle du conducteur parfait).
   a. Montrer que les champs électrique et magnétique sont nuls dans le métal.
   b. Le champ électrique dans le vide de l'onde incidente sur le conducteur parfait est donné en notation complexe par : $\underline{\vec{E}_i}=\underline{E}_{0i}\vec{e}_x\exp i(\omega t-k_0z)$. Ecrire les conditions aux limites sur le champ magnétique $\vec{B}$. En déduire, sur la face d'entrée $z=0$ du conducteur parfait, l'expression de la densité du courant surfacique $\vec{j}_s$.

Problème 3 : Ligne de transport d'énergie électromagnétique

Soit $R\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$ un repère orthonormé direct. Une ligne de transport d'énergie électromagnétique est constituée, dans R, de deux rubans conducteurs parfaits parallèles entre eux et placés dans le vide. Ces rubans d'épaisseurs négligeables, **sont assimilés à deux plans** parcourus par des courants superficiels de densité surfaciques $\vec{j}_s=j_s(x,t)\vec{e}_x$ et $-\vec{j}_s$, et présentent sur leurs faces en regard des densités surfaciques de charges $\sigma(x,t)$ et $-\sigma(x,t)$ (voir figure 2).

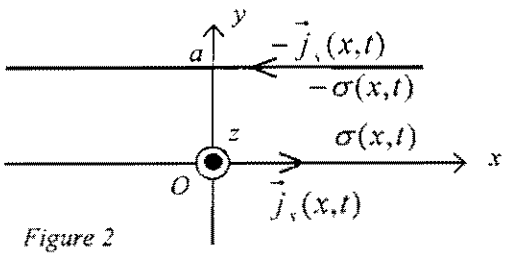


Figure 2

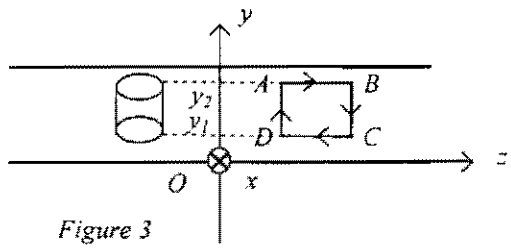


Figure 3

On étudie les champs électrique et magnétique $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ créés par ces distributions de charges et de courants, uniquement dans l'espace inter-conducteur situé entre les rubans d'équations $y=0$ et $y=a$ (figure 2).

1. En exploitant les considérations de symétrie, montrer que les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont de la forme : $\vec{E}(M,t)=E_x(x,y,t)\vec{e}_x+E_y(x,y,t)\vec{e}_y$ et $\vec{B}(M,t)=B(x,y,t)\vec{e}_z$.
2. On admet dans cette question que $E_x(x,y,t)=0$.
   a. Ecrire entre les deux rubans, la densité $\vec{j}_D(M,t)$ du courant de déplacement. En appliquant le théorème d'Ampère, à un contour rectangulaire parallèle au plan (yOz), comme le montre la

figure 3 (contour ABCDA), montrer que $\vec{B}(M,t)$ est indépendant de y, soit $\vec{B}(M,t) = B(x,t)\vec{e_z}$.

b. En appliquant le théorème de Gauss à la surface cylindrique fermée de la figure 3, montrer que $\vec{E}(M,t)$ est indépendant de y, soit : $\vec{E}(M,t) = E(x,t)\vec{e_x}$.

c. Ecrire, en $y = 0$, les conditions aux limites sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$. En déduire $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ en tout point M situé entre les deux conducteurs parfaits.

d. A partir de l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans le vide inter-conducteur, déterminer l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait $\sigma(x,t)$.

e. A partir de l'équation de propagation de $\vec{B}$ dans le vide inter-conducteur, déterminer l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait $\vec{j_s}(x,t)$.

f. Pourquoi peut-on parler d'ondes de courants surfaciques et de charges surfaciques ? Quelle est leur vitesse de phase ?

3. On suppose maintenant que $E_x(x,y,t) \neq 0$ et on donne le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$, se propageant dans le vide inter-conducteur :

$$\vec{B}(M,t) = B_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right)\exp i(\omega t - kx)\vec{e_z} \quad pour \quad 0 \le y \le a$$

$$\vec{B}(M,t) = \vec{0} \qquad\qquad pour \quad y \le 0 \; et \; y \ge a$$

a. Trouver la densité superficielle du courant $\vec{j_s}(x,t)$.

b. Ecrire les équations de Maxwell et déterminer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$. En déduire la densité superficielle de charge $\sigma(x,t)$. Comparer $\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t}$ et $div\,\vec{j_s}$. Interpréter le résultat obtenu.

c. Ecrire l'équation de propagation de $\vec{B}$ dans l'espace inter-conducteur. Trouver alors $k^2(\omega)$. En déduire les vitesses de phase et de groupe de cette onde.

d. On s'intéresse à la vitesse V_e de propagation de l'énergie moyenne dans la ligne.

i. Ecrire le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps. En déduire le flux d'énergie moyenne à travers une section rectangulaire S de la ligne de longueur unité ($L = 1$) et de largeur a.

ii. Ecrire la densité d'énergie électromagnétique moyenne. Exprimer, en fonction de V_e, la puissance électromagnétique moyenne traversant la section S. En déduire V_e. Conclure.

On donne $\int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)dy = \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)dy = \frac{a}{2}$

UNIVERSITE DE TUNIS
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure

Session Juillet 2007

Section : Physique - chimie

Epreuve d'Anglais

Durée : 2 h Coef.: 1

The First Aeroplanes

1. Steam engines were the first to be tried in aeroplanes, but they were too heavy to be of any real use. One such machine, made in 1884, consisted of a large number of wings one above the other and was driven by a steam engine. It is said to have risen for a moment off the ground. It was not until the petrol engine, which is very light for the power it develops, was fitted to a machine that any real success was obtained.

2. On December 17, 1903, Orville Wright, an American, flew safely in a heavier-than-air machine for twelve seconds. He and his brother Wilbur had made a lot of experiments and had taken immense trouble to study the art of flying in gliders before they attempted to fly their aeroplane. The experiment was repeated three times. The longest of these flights covered a distance of 852 feet and lasted 59 seconds. The machine which was used had an engine developing only sixteen horse-power but the aeroplane reached a speed of 35 miles an hour.

3. The Wright brothers laid the foundation of modern flying. Others followed in their steps. Louis Blériot, flew across the Channel from Calais to Dover in 1909. Prizes were offered and competition increased. More powerful engines were developed. In 1919 Sir John Alcock and Sir Arthur Brown made the first flight across the Atlantic Ocean, and in the same year an aeroplane flew from England to Australia. The age of air travel had arrived.

4. What were the difficulties which the early pioneers had to overcome in making successful aeroplanes? One of them was to decide what general system ought to be used. Naturally the first idea was to use wings as birds do. Some of the early machines had a lot of wings of various sizes and in different positions. The number was soon reduced to a maximum of three, one above the other. The machine with three wings was known as triplane; it disappeared from the sky long ago. The biplane, with two wings, lasted longer and could be seen fairly frequently up to the war of 1939. The monoplane is now the commonest type of aircraft. It has the advantage that it presents less resistance to the air than other types, and can therefore fly faster with the same power.

G. C. Thornley, *Power and Progress.*

Clear handwriting and clean presentation of your paper are required

PART ONE: COMPREHENSION QUESTIONS

A/ Answer the following questions using complete sentences and your own words.

1. The men, who first tried to fly in heavier-than-air machines, faced a major difficulty. What was this difficulty? Explain.

.....
.....
.....
.....

2. How did early aeroplanes differ from modern ones?

.....
.....
.....
.....

B/ Say whether the following statements are true or false. Justify from the text.

1. Steam engines in aeroplanes proved to be very practical.

.....

2. The Wright brothers' experiments were not founded on any theoretical basis.

.....

C/Find the equivalent in the text for:

1. a flying object without an engine: .....
2. someone who goes in front and prepares the way: .....

D/ Fill each space with the appropriate word from the text.

1. A ..... is an aeroplane which has only one wing.
2. The scientist was in the laboratory making an ..... With two acids.
3. We can study the ..... of birds by taking photographs of them while they are flying.
4. Marconi was a great ..... in the study of wireless telegraphy.

PART TWO: LANGUAGE

A/ Circle the right alternative.

Mary used to have quite **(many/ a few / few)** interesting scientific articles and books. She lent them only to **(a few/ few / some)** of her dearest friends. But even then, she would be **(a little/ little / not at all)** nervous when she did this. Her friends **(who / that / whom)** knew that she was too proud **(of / about / in)** her collection, never insisted **(in/ to / on)** her to **(borrow / loan / take)** them one of these valuable books. Therefore, they **(have / would have/ had had)** a good laugh **(at / on / about)** her whenever she **(gives / had given / gave)** them one rather reluctantly. One day, her brother Sam told her joking, "You know Mary, if I **(was / were /had been/ am)** you, I **(gained / will gain / would gain / had gained)** much money by lending the most interesting books in **(this / these / those)** collection!"

B/ Put the verbs in parentheses in the right tense to make correct conditional sentences.

1. It is a pity he never patented his invention. If he **(to patent)** ..... it, he **(to make)**..... a lot of money.
2. Ann's English does not because they speak French to her. If they **(to speak)** ..... English to her, she **(to improve)** .....
3. He smokes too much, that's why he can't get rid of his cough. If I **(to be)** ..... him, I **(to give up)** ..... smoking.

PART III: WRITING

Since the Wright brothers, aeronautic technologies have witnessed drastic advances but at the same time many argue that too much technology has made air traffic more difficult to manage. Write no more than a 15 – line essay where you support your own point of view with your experience and observations.

Université de Tunis
Ecole Normale supérieure

Concours d'entrée à l'ENS
Session de juillet 2007-07-06 SECTIONS : Mathématiques

Physique_Chimie

Epreuve de français
Durée : 3h. Cof. 2

Epreuve de commentaire de texte :

Questions :
1- Quelle est la cause de la fin des voyages d'après le 1e paragraphe. (4 points)
2- Commentez les expressions suivantes : « une zone maladive », « merveilles dont nous jouissons », « ordure lancée au visage du monde ». (3 points)
3- Par quoi se caractérise l'image actuelle du monde représentée dans le 3e paragraphe ? (5 points)
4-Essai : (8 points)
Voyez-vous une autre conséquence négative du développement de la science moderne, mise à part la pollution des villes que critique Claude Lévi-Strauss dans ce texte ? (20 lignes)

La fin des voyages

Voyages, coffrets magiques aux promesses rêveuses, vous ne livrerez plus vos trésors intacts. Une civilisation proliférante et surexcitée trouble à jamais le silence des mers. Les parfums des tropiques et la fraîcheur des êtres sont viciés par une fermentation aux relents suspects, qui mortifie nos désirs et nous voue à cueillir des souvenirs à demi corrompus.

Aujourd'hui où des îles polynésiennes noyées de béton sont transformées en porte-avions pesamment ancrés au fond des mers du Sud, où l'Asie tout entière prend le visage d'une zone maladive, où les bidonvilles rongent l'Afrique, où l'aviation commerciale et militaire flétrit la candeur de la forêt américaine ou mélanésienne avant même d'en pouvoir détruire la virginité, comment la prétendue évasion du voyage pourrait-elle réussir autre chose que nous confronter aux formes les plus malheureuses de notre existence historique ? Cette grande civilisation occidentale, créatrice des merveilles dont nous jouissons, elle n'a certes pas réussi à les produire sans contrepartie. Comme son œuvre la plus fameuse, pile où s'élaborent des architectures d'une complexité inconnue, l'ordre et l'harmonie de l'Occident exigent l'élimination d'une masse prodigieuse de sous-produits maléfiques dont la terre est aujourd'hui infectée. Ce que d'abord vous nous montrez, voyages, c'est notre ordure lancée au visage de l'humanité.

Je comprends alors la passion, la folie, la duperie des récits de voyage. Ils apportent l'illusion de ce qui n'existe plus et qui devrait être encore, pour que nous échappions à l'accablante évidence que 20 000 ans d'histoire sont joués. Il n'y a plus rien à faire : la civilisation n'est plus cette fleur fragile qu'on préservait, qu'on développait à grand-peine dans quelques coins abrités d'un terroir riche en espèces rustiques, menaçantes sans doute par leur vivacité, mais qui permettaient aussi de varier et de revigorer les semis. L'humanité s'installe dans la monoculture ; elle s'apprête à produire la civilisation en masse, comme la betterave. Son ordinaire ne comportera plus que ce plat.

Claude LÉVI-STRAUSS, *Tristes tropiques*, Plon, 1955, rééd. coll. 10/18, pp. 25-26.



Claude Lévi-Strauss (né en 1908) a donné à l'ethnologie de nouvelles assises méthodologiques (Anthropologie structurale) *fondées sur l'étude des relations de communication. On lui doit divers ouvrages consacrés aux sociétés primitives* (La pensée sauvage) *dans lesquelles il recherche la signification et la formation des mythes (en particulier ceux touchant à la nourriture :* Le cru et le cuit, *etc...).*

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR.

Ecole Normale Supérieure.

Concours d'entrée en première année.
Spécialité physique-chimie. Année 2007.

Première épreuve de mathématiques.
Durée : 4 heures

Exercice 1

On notera sinh, cosh, coth et tanh les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, cotangente hyperbolique et tangente hyperbolique.

Soit a un élément de $\mathbf{C}$ tel que $-a^2$ n'appartienne pas à $\mathbf{N}$ et soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \cosh(ax) \quad , \quad |x| \leq \pi$$

1) Etablir la formule

$$\cosh(ax) = \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a\cos(nx)}{n^2+a^2} \quad , \quad |x| \leq \pi$$

2) En déduire l'égalité

$$\pi \coth(a\pi) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n^2+a^2}$$

et retrouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

3) Montrer que l'on a

$$\frac{1}{\sinh(t)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(2n+1)t) \quad , \quad t > 0$$

et en déduire les égalités

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{\sinh(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

4) Prouver l'implication

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(2n+1)^2+x^2} = h(x) - \frac{1}{2} h\left(\frac{x}{2}\right)$$

5) Montrer que, pour tout réel x, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{\sinh(t)} dt = \frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

6) En déduire les valeurs des intégrales

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\infty} \frac{t}{\sinh(t)} dt \quad , \quad \text{(b)} \quad \int_0^{\infty} \frac{t^3}{\sinh(t)} dt$$

Exercice 2

On considère les intégrales dépendant du paramètre réel x

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt \quad , \quad G(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(tx)}{t^2} \frac{dt}{1+t^2}$$

1) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbf{R}$ et majorer $|F(x)|$.

2) Montrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

3) Montrer que

$$F(0) - F(x) + G(x) = |x| \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

4) En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et que $F''(x) = F(x)$ pour tout $x > 0$.

5) Montrer que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \exp(-|x|) \quad , \quad x \in \mathbf{R}$$

6) Calculer les intégrales suivantes

$$\text{(a)} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt \quad , \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad , \quad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t(1+t^2)} dt$$

Exercice 3

On note $M(n, \mathbf{C})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbf{C}$ et on désigne par I_n la matrice unité de $M(n, \mathbf{C})$.

On adopte les notations suivantes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbf{C}) \text{ et } M \in M(n, \mathbf{C}) \Longrightarrow A \otimes M = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbf{C})$$

1) Que représente la matrice $I_2 \otimes I_n$?

2) Montrer que si $A,\ B \in M(2, \mathbf{C})$ et $M,\ N \in M(n, \mathbf{C})$ alors

$$(A \otimes M).(B \otimes N) = (A.B) \otimes (M.N)$$

3) Montrer que si les matrices $A,\ A' \in M(2, \mathbf{C})$ sont semblables et si $M \in M(n, \mathbf{C})$ alors les matrices $A \otimes M$ et $A' \otimes M$ sont aussi semblables.

4) Montrer que si $A \in M(2, \mathbf{C})$ et $M \in M(n, \mathbf{C})$ alors

$$\det(A \otimes M) = (\det A)^n (\det M)^2$$

(Indication : on pourra commencer par le cas où la matrice A est triangulaire)
